Equazioni di Maxwell

Equazioni di Maxwell

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{concatenate}$$

Asimmetria tra E e B

a) esistono due tipi di carca elettrica, ma non sono stati osservati monopoli magnetici

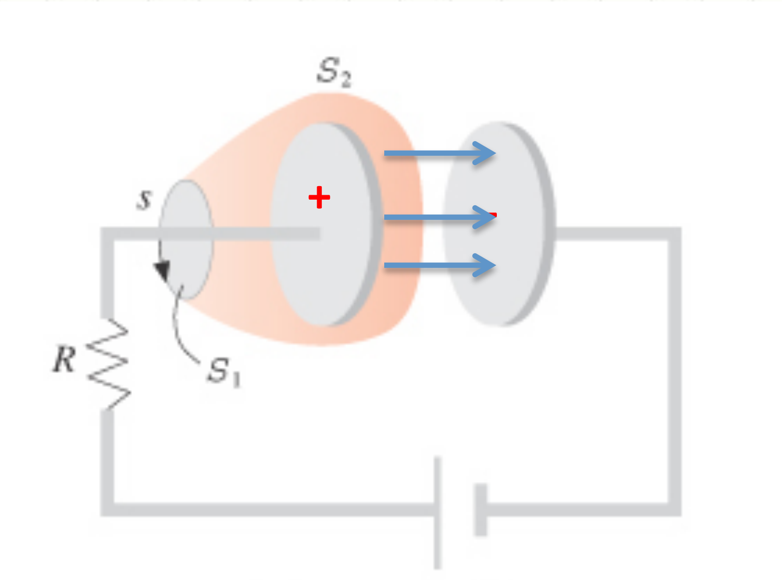
b) Il **campo magnetico** variabile nel tempo genera un campo **elettrico indotto**, un campo elettrico variabile nel tempo non dà origine ad un campo magnetico (?)

Teorema di Ampère in condizioni non stazionarie:
Legge di Ampère-Maxwell

In condizioni stazionarie

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{concatenate}}$$

Legge di Ampere Maxwell

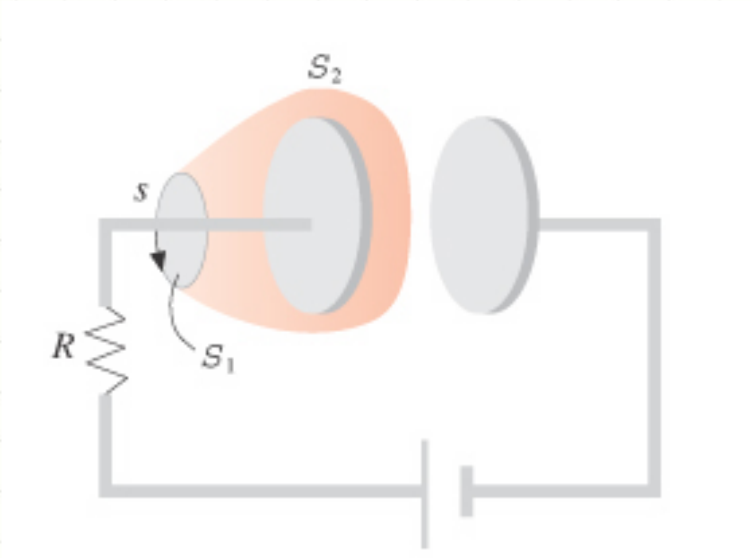


γ linea chiusa concatenata col conduttore
S_1, S_2superfici che si appoggiano a γ

Processo di carica di C: la corrente entra nell'armatura positiva e esce dall'armatura negativa.

$$\int_{S1} \vec{J} \bullet \vec{n}\, dS = i \qquad\qquad \int_{S2} \vec{J} \bullet \vec{n} dS = 0$$

Legge di Ampere Maxwell



$$\int_{S1} \vec{J} \bullet \vec{n}\, dS = i$$

$$\int_{S2} \vec{J} \bullet \vec{n} dS = 0$$

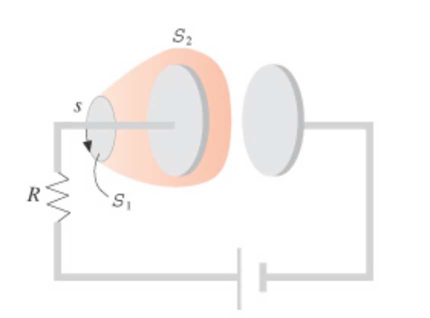
$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{concatenate}}$$

il teorema di Ampère non dà lo stesso risultato se applicato ad S_1 o ad S_2

Attraverso la superficie chiusa $S_1 + S_2$ la corrente che esce è diversa dalla corrente che entra: **non vale la condizione di stazionarietà**
In condizioni non stazionarie il teorema di Ampère non è valido e deve **essere modificato!**

Legge di Ampere Maxwell

Nel processo di carica di C abbiamo supposto che i(t) circoli ovunque..ma tra le armature non possono esserci **correnti di conduzione.**
Su una armatura c'è una variazione di dq/dt corrispondente alla corrente entrante, e sull'altra c'è una variazione –dq/dt cui corrisponde un corrente uguale ed uscente.



$$I = \frac{dq(t)}{dt}$$

corrente entrante nell' armatura negativa

$$I = -\left(-\frac{dq(t)}{dt}\right)$$

corrente uscente dall' armatura positiva

Teorema di Ampere Maxwell

Sia S superficie chiusa. In condizioni non stazionarie:

(x il principio di conservazione della carica)

$$\boxed{\oint_S \vec{J} \bullet \vec{n} dS = -\frac{dq}{dt}}$$

Teorema di Gauss

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

$$\frac{dq}{dt} = \varepsilon_0 \oint_S \frac{d\vec{E}}{dt} \bullet d\vec{S}$$

$$\varepsilon_0 \oint_S \frac{d\vec{E}}{dt} \bullet d\vec{S} = -\oint_S \vec{J} \bullet d\vec{S}$$

La variazione di carica sulle armature $\Rightarrow$ una variazione del campo elettrico fra le armature e quindi una variazione di flusso

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\oint_S \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \bullet d\vec{S} = 0}$$

Teorema di Ampere Maxwell

$$\boxed{\oint_S \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \bullet d\vec{S} = 0}$$

$$\boxed{\vec{J}_{Tot} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}}$$

Il vettore è solenoidale anche in condizioni non stazionarie

$$\boxed{\vec{J}_s = \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}}$$

Densità di corrente di spostamento

$$\boxed{i_s = \oint_S \vec{J}_s \bullet \vec{n}\, dS = \varepsilon_0 \oint_S \frac{dE}{dt} \bullet d\vec{S} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}}$$

Corrente di spostamento

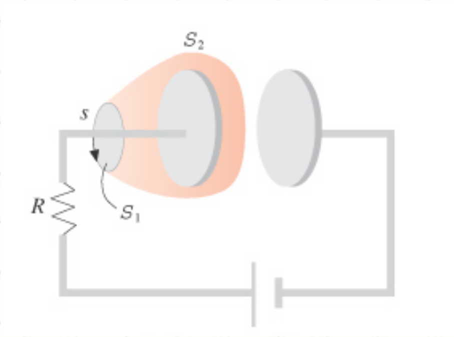
$$\boxed{\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 (i_c + i_S)}$$

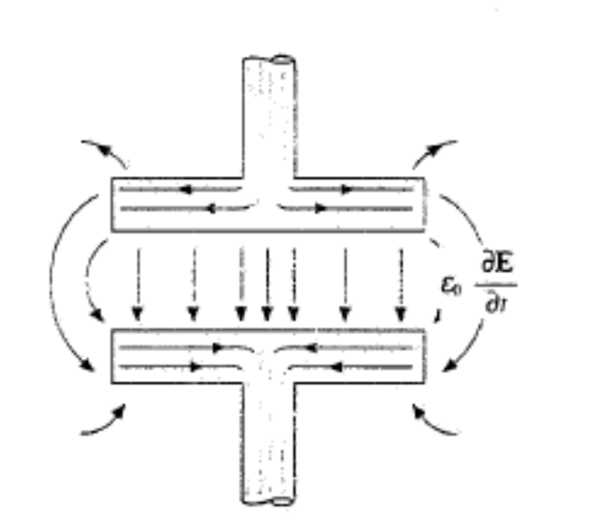
Teorema di Ampere Maxwell

$$\boxed{\vec{J}_{Tot} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}}$$

$$\int_{S1} \vec{J}_{tot} \bullet d\vec{S} = \int_{S1} \vec{J} \bullet d\vec{S} = i$$

$$\int_{S2} \vec{J}_{tot} \bullet d\vec{S} = \int_{S2} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \bullet d\vec{S} = i$$





È solenoidale: i due flussi devono essere uguali. La corrente deve avere lo stesso valore lungo tutto il circuito. Coincide con la corrente di conduzione nei cavi e con la corrente di spostamento nel condensatore.

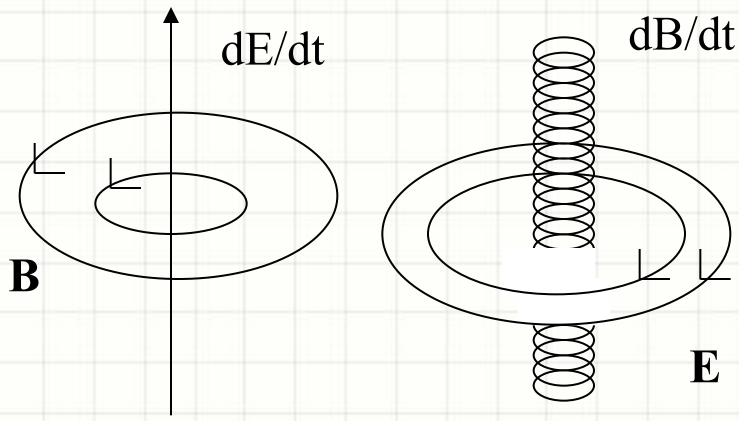
Teorema di Ampere Maxwell

$$\vec{J}_{Tot} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \int_S \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \bullet d\vec{S}$$

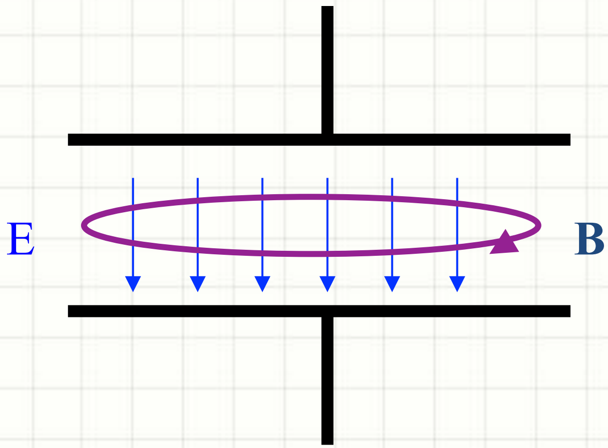
- La circuitazione di B non dipende dalla superficie S che poggia su γ
- **Un campo E variabile nel tempo determina un campo B**

(simmetricamente rispetto all'equazione di Faraday – Lenz)



Verifica sperimentale

Un condensatore a piatti piani e paralleli di raggio R è collegato ad un generatore che stabilisce tra le armature un $E = E_0 \mathrm{sen} wt$



Consideriamo una circonferenza di raggio r < R

$$\boxed{\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \int_S \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \right) \bullet d\vec{S}}$$

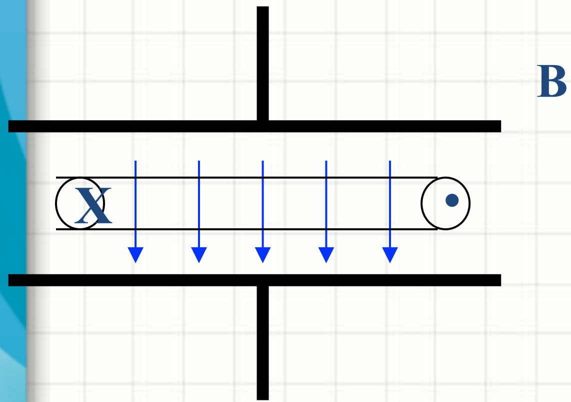
r < R

$$2\pi r B = \varepsilon_0 \mu_0 \int \frac{d\vec{E}}{dt} \bullet d\vec{S} = \varepsilon_0 \mu_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

$$\boxed{B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu_0 r \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu_0 r \omega E_0 \cos \omega t}$$

Verifica sperimentale

Se inseriamo nel condensatore un solenoide toroidale, La f.e.m. indotta nel solenoide:



$$B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mu_0 r \omega E_0 \cos \omega t$$

$$\varepsilon_i = -NS'\frac{dB}{dt} = NS'\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} r \omega^2 E_0 sen\, \omega t$$

Per es. $r = 10$ cm

$S = 3\ cm^2$

$N = 600$

$E_0 = 10^3 V/m$ $\quad \omega = 10^7$ rad/s

$B = 5.6\ 10^{-9} \cos 10^7 t$ T

$\varepsilon = 0.01\ sen\ 10^7 t$ V

Equazioni di Maxwell

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{E}_i \bullet d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \bullet d\vec{S}$$

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 (i_C + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}) = \mu_0 \int_S \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \bullet d\vec{S}$$

Equazioni di Maxwell
…nel vuoto (q= 0 e i_c =0)

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = 0$$

$$\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{E}_i \bullet d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Importanza della teoria di Maxwell:

1. mostrano una perfetta simmetria fra i due campi
2. fenomeni elettrici e magnetici possono essere considerati come aspetti di un'unica interazione fondamentale
3. previsione di fenomeni dinamici (**onde elettromagnetiche**), la cui verifica sperimentale prova la realtà fisica del **campo elettromagnetico**